

TD 22-23 : Polynômes : généralités et racines

Degré, dérivation

1 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les degrés et les coefficients dominants des polynômes suivants :

$$P = (X+1)^n - (X-1)^n \quad Q = (X(1-X))^n$$

2 ★★ Déterminer tous les polynômes P tels que $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$ et $P^{(n)}(2) = 0$ pour tout $n \geq 2$.

3 ★★ Résoudre les équations suivantes, d'inconnue(s) $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

- | | |
|---------------------------|----------------|
| 1) $Q(X)^2 = XP(X)^2$ | 4) $XP = P'$ |
| 2) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ | 5) $P = XP'$ |
| 3) $P \circ P = P$ | 6) $P = P'P''$ |

4 ★★ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de P .

5 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. Montrer que f n'est pas une fonction polynomiale.

6 ★★ Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X - 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = P_n^2 - 2$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n, b_n et c_n les coefficients de degré 2, 1 et 0 de P_n .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
- Déterminer le coefficient de degré 0 de P_n , puis le coefficient de degré 1 de P_n .
- Déterminer le coefficient de degré 2 de P_n .

Divisibilité de polynômes

7 ★★ Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $X^3 + pX + q$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

8 ★★ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $n \geq 2$ un entier.

L'objectif est de calculer A^n par une nouvelle méthode dite du "polynôme annulateur".

- Calculer A^2 puis déterminer deux réels α, β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_n = 0$. On dit alors que le polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$ est un polynôme annulateur de A .
- Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + \alpha X + \beta$?
- En déduire A^n .

9 ★★ Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = BQ$. Montrer que $Q \in \mathbb{R}[X]$ (autrement dit, si B divise A dans $\mathbb{C}[X]$ alors B divise A dans $\mathbb{R}[X]$).

10 ★★ (Classique !) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

- Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

PGCD, PPCM

11 ★ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 - 3X + a$, $Q(X) = X^2 - 1$. Déterminer selon a le PGCD de P et Q .

12 ★★ On pose

$$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$$

$$B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$$

Déterminer $A \wedge B$ puis un couple de coefficients de Bézout pour A et B .

13 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = X^n + 1$ et $B = X^n - 1$. Déterminer $A \wedge B$ et $A \vee B$.

14 ★★★ (Un grand classique) Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) On suppose que $m \mid n$. Montrer que $X^m - 1 \mid X^n - 1$.
- 2) Montrer que si la division euclidienne de n par m est donnée par $n = mq + r$, alors la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ est donnée par $X^n - 1 = (X^m - 1)Q + (X^r - 1)$ où Q un polynôme que l'on précisera.
- 3) Montrer que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.

Conséquence de la question 3 : $m \wedge n = 1$ si et seulement si $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X - 1$.

Racines et factorisation

15 ★ Déterminer les solutions des systèmes suivants (les inconnues sont prises dans $\mathbb{C}$) :

$$1) \begin{cases} a + b = i \\ ab = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a + b + c = -2 \\ ab + bc + ca = -1 \\ abc = 2 \end{cases}$$

Pour le second système, on pourra développer le polynôme $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.

16 ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la multiplicité de la racine 1 pour le polynôme

$$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$

17 ★★ Montrer que 1 est racine triple de

$$P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$$

En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

18 ★★ Soit $P = 8X^3 - 4X^2 - 2X + 1$. Trouver les racines de P sachant que la somme de deux de ses racines fait 1.

19 ★★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n := 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$$

Montrer que P_n n'admet pas de racine multiple.

20 ★★ Soit $P = X^3 - 6X + m$ avec $m > 0$. Déterminer les valeurs de m telles que P admette une racine double. Quelle est l'autre racine ?

21 ★★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) = n^2$. Montrer que $P = X^2$.

22 ★★★ Soit $T > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si la fonction $f : x \mapsto P(x)$ est T -périodique, alors P est constant.

23 ★★★ Déterminer tous les couples $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $P = X^3 + pX + q$ admet une racine double. Déterminer dans ce cas toutes les racines de P .

24 ★★★ Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- 1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X) - X$ divise $P(X)^k - X^k$.
- 2) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
- 3) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

25 ★★★

- 1) Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(X+1) - Q(X) = X$
- 2) En déduire les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_k^{k+1} P(t) dt = k$

Polynômes d'interpolation de Lagrange

26 ★ Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P tel que

- 1) $P(1) = 2, P(2) = 3$ et $P(3) = 6$.
- 2) $P(1) = a, P(2) = b$ et $P(3) = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

27 ★★ On cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2, P(2) = 3$ et $P(3) = 4$

- 1) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vérifie ces conditions. On le notera $L(X)$ dans la suite.
- 2) Soit P une solution quelconque du problème. Que peut-on dire du polynôme $P - L$ en termes de racines ?
- 3) Conclure, en précisant le raisonnement utilisé.